

**Οδηγίες**

- 1) Συγκεντρώστε όλες τις σελίδες σας σε ένα και μοναδικό PDF αρχείο.
- 2) Οι απαντήσεις σας θα πρέπει να είναι τεκμηριωμένες. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν θα βαθμολογηθούν.
- 3) Ίδια γραπτά μπορεί να είναι λόγος μηδενισμού ή παραπομπής σε προφορική εξέταση.

**Θέμα 1ο.** Έστω  $\{a_n\}$  μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

- i) [1.25 μον.] Αν η  $\{a_n\}$  συγκλίνει, ναδειχθεί ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_n \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

- ii) [1.25 μον.] Να εξεταστεί αν ισχύει το αντίστροφο.

**Θέμα 2ο.** [1.5 μον.] Έστω  $a, \beta \geq 0$  δύο αριθμοί. Ναδειχθεί ότι

$$\lim_n \left( \frac{a^{\frac{1}{n}} + \beta^{\frac{1}{n}}}{2} \right)^n = \sqrt{a\beta}.$$

**Θέμα 3ο.** [1.5 μον.] Έστω  $f : (a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  μία αύξουσα συνάρτηση. Αν το σύνολο τιμών  $f((a, \beta))$  της  $f$  είναι διάστημα, ναδειχθεί ότι η  $f$  είναι συνεχής παντού στο  $(a, \beta)$ .

**Θέμα 4ο.** Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x - \sin x$ .

- i) [0.75 μον.] Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$  και ότι υπάρχει η αντίστροφη της  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- ii) [1.25 μον.] Ναδειχθεί ότι ισχύει

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{6}.$$

**Θέμα 5ο.** Να βρεθούν, κάνοντας αποκλειστική χρήση του  $\varepsilon - n_0$  και  $\varepsilon - \delta$  ορισμού του ορίου, τα παρακάτω όρια.

- i) [0.75 μον.]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^5}$
- ii) [0.75 μον.]  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 5x + 2)$ .

**Θέμα 6ο.** Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

- i) [0.5 μον.] Έστω  $X$  ένα μη κενό και φραγμένο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας. Τότε το σύνολο

$$A = X \cup \{\inf X, \sup X\}$$

είναι κλειστό.

- ii) [0.5 μον.] Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης μίας ακολουθίας περιέχεται στο σύνολο των σημείων συσσώρευσης του πεδίου τιμών της.